具有不确定性的 R& D 项目退出策略

薛明皋　李楚霖

(华中科技大学数学系)

摘要：考虑折现率大于零、具有完成时间和部分残值不确定的 R& D 项目最优退出模型. 在特殊的函数形式下, 给出解析形式的拒绝规则和临界值控制规则, 这两个结论说明了最优投资决策在项目的开发过程中对投资率、折现率、可实现的项目价值、项目的开发率是很敏感的.

关 键 词：投资决策；停时；HJB 方程；剩余完成时间
中图分类号：O224；F830.59　　文献标识码：A　　文章编号：1671-4512(2002)09-0054-03

关于具有完成时间的连续投资项目, 如研究与开发(R& D) 项目的投资决策, 在停时理论的框架下展开了大量研究[1, 2]. 实际上, 公司经常从事一些需要完成时间、连续投资的项目, 这些类型的投资不仅包括产品的开发而且还包括生产系统的工程改造, 因为这些投资项目不可能预料到在开发过程中所有的技术问题, 项目的完成时间不可避免地服从一个不确定的显著水平. 这种不确定性的存在意味着项目的完成时间仅能在事前做出不完全估计, 这个估计可能由于在开发过程中新信息的到达而被修改, 在这种不确定性下, 管理者对项目是否还值得继续投资, 经常面临严重的困难. 本文在文献[3]的基础上, 利用停止理论, 在折现率大于零的情况下, 给出最优退出规则.

1 模型

在项目的开发过程中完成项目的时间通常是不确定的, 因为在开发项目的过程中经常遇到不可预见的各种技术上的困难. 用 X_t 表示在 t 时刻估计剩余完成项目的时间, 假设 X_t 的变化服从随机微分方程:

$$\mathrm{d}X_t = -\,\mathrm{d}t + \sigma\rho(X_t)\,\mathrm{d}W_t \quad (t \geqslant 0),$$

式中, $\sigma > 0$ 是常数; W_t 是标准布朗运动; $\rho(0) = 0$, $\rho'(X_t) > 0$, 因为当项目接近完成时(即 $X_t \to 0$), 对估计完成时间的不确定性将缩小, 关于 $\rho(X_t)$ 的函数形式的估计, 参见文献[3]. 现承接一公司的 R& D 项目的开发合同, 如果开发公司按合同规定的标准完成, 那么它可以得到全部的酬金 $P \in (0, \infty)$. 如果公司在开发过程中遇到不能解决的技术困难, 未能按照合同的标准完成, 甚至公司有权放弃(终止)此项目的研究和开发, 那么公司可得到残值, 即得到部分酬金, 以后称它为可实现的项目价值或残值, 用 $Z(X_t)$ 表示, 设 $Z(0) = P$, $Z'(X_t) < 0$, 即当项目完成时, $X_t = 0$ 可得到全部酬金 P, 根据文献[4]分析项目残值的框架可分三种情况: 当 $X_t \to 0$ 时, $Z''(X_t) > 0$ 为加速, $Z''(X_t) = 0$ 为匀速, $Z''(X_t) < 0$ 为减速.

定义两种停时: 一种是自然停时, 由于项目的完成而停止, 用 τ 表示, 设 $\tau = \inf\{t \geqslant 0: X_t \leqslant 0\}$; 另一种是放弃停时, 用 θ 表示, θ 是决策变量. 当 $\tau \leqslant \theta$ 时, 表示项目完成; 当 $\theta < \tau$ 时, 表示提前终止此项目, 明显地, 当 $\tau \leqslant \theta$ 时, $X_\tau = 0$, $X_\theta = 0$, $Z(X_\tau) = Z(X_\theta) = P$; 当 $\theta < \tau$ 时, $X_\theta > 0$, $X_\tau = 0$. 用 $x = X_0$ 表示在 $t = 0$ 时估计剩余完成时间. 假设项目开始时需要投资沉降成本 I, 项目开始以后需连续的投资率 $K > 0$.

控制问题的目标是在 $\theta < \tau$ 上使期望利润最大化, 即有值函数

$$v(x) = \sup_{\lambda < \tau} E_x\Big[P\mathrm{e}^{-\mu\tau} l_{[\tau \leqslant \theta]} + Z(X_\theta)\mathrm{e}^{-\mu\theta} l_{[\theta < \tau]} - \int_0^{\theta \wedge \tau} K\mathrm{e}^{-\mu t}\,\mathrm{d}t - I\Big],$$

式中, E_x 表示在 $t = 0$ 时的条件期望算子; $l_{[\cdot\cdot]}$ 表示示性函数; $\mu > 0$ 为折现率.

注意初始投资 I 是沉降成本, 它不影响以后

收稿日期: 2001-10-17.
作者简介: 薛明皋(1968-), 男, 博士研究生; 武汉, 华中科技大学数学系(430074).
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(70071021).

项目的最优决策. 因此, 不失一般性, 在以后的讨论中均假设 $I=0$, 并设 P, $Z(X_t)$ 和 K 均为有界量.

2　HJB 方程

由于模型的马尔可夫结构, 关于标准的停时理论, 希望值函数 $v(x)$ 与下面的 HJB 方程的解 $w(x)$ 相一致, 即

$$\max\{\sigma^2\rho^2(x)w''(x)/2-w'(x)-\mu w(x)-K,\ Z(x)-w(x)\}=0. \tag{1}$$

下面的定理保证值函数 $v(x)$ 与 HJB 方程 (1) 的解 $w(x)$ 在一定条件下相一致.

定理 1 (检验定理)　考虑所定义的控制问题及相关假设均成立, 并假设 HJB 方程 (1) 的解 $w(x)$ 属于索伯列夫空间, $W^{2,p}_{\mathrm{loc}}(0,\infty)$, $p\in[1,\infty]$ 使过程

$$M_t=\int_0^t e^{-\mu s}\sigma\rho(X_s)w'(X_s)\mathrm{d}W_s$$

为鞅, 那么对给定的任何初始条件 $x>0$, 有:
a $v(x)\leqslant w(x)$; **b.** 如果 $\lim\limits_{t\to\infty}\inf e^{-\mu t}E\cdot|w(X_t)|=0$, 那么 $v(x)=w(x)$, 最优策略

$$\theta=\inf\{t\geqslant 0,\ x\in S\},$$
$$S\triangleq\{x\in(0,\infty):w(x)=Z(x)\}. \tag{2}$$

证明　**a.** 固定任意 θ, 应用 Itô-Tanaka's 公式[5]

$$e^{-\mu t}w(X_t)=w(t)+\int_0^t e^{-\mu s}\cdot[\sigma^2\rho^2(X_s)w''(X_s)/2-w'(X_s)-\mu w(X_s)]\mathrm{d}s+\int_0^t e^{-\mu s}\sigma\rho(X_s)w'(X_s)\mathrm{d}W_s. \tag{3}$$

由式 (1) 和 (3) 有

$$Pe^{-\mu(\tau\wedge t)}l_{[\tau\wedge t<\theta]}+e^{-\mu(\theta\wedge t)}Z(X_{\theta\wedge t})\cdot l_{[\theta\wedge t<\tau]}-\int_0^{(\theta\wedge\tau)\wedge t}Ke^{-\mu s}\mathrm{d}s=Z(X_{\theta\wedge t})\cdot e^{-\mu(\theta\wedge t)}-\int_0^{\theta\wedge t}Ke^{-\mu s}\mathrm{d}s=Z(X_{\theta\wedge t})e^{-\mu(\theta\wedge t)}-\int_0^{\theta\wedge t}Ke^{-\mu s}\mathrm{d}s-e^{-\mu(\theta\wedge t)}w(X_{\theta\wedge t})+w(x)+\int_0^{\theta\wedge t}e^{-\mu s}[\sigma^2\rho^2(X_s)w''(X_s)/2-w'(X_s)-\mu w(X_s)]\mathrm{d}s+\int_0^{\theta\wedge t}e^{-\mu s}\sigma\rho(X_s)w'(X_s)\mathrm{d}W_s\leqslant w(x)+\int_0^{\theta\wedge t}e^{-\mu s}\sigma\rho(X_s)w'(X_s)\mathrm{d}W_s.$$

将上式两端取期望, 并令 $t\to\infty$, 由控制收敛定理可得 $v(x)\leqslant w(x)$.

b. 对于式 (2) 中定义的 θ, 由 **a** 可知 $v(x)=w(x)$.

3　主要结果

如果这个决策是最优的, 那么应该找到 HJB 方程 (1) 的解, 使 $w(x)=Z(x)$, $\forall x\in(\hat{x},\infty)$, 即

$$\sigma^2\rho^2(x)w''(x)/2-w'(x)-\mu w(x)-K=0\quad(\forall x\in(0,\hat{x})), \tag{4}$$

这里 $\rho(x)=(1-e^{-\lambda x})^{1/2}$, $\lambda>0$[3]. 方程 (4) 的通解为

$$w(x)=w_1(x)\left[c_1+c_2\int(e^{\lambda x}-1)^{2/(\sigma^2\lambda)}w_1^{-2}(x)\mathrm{d}x\right]-\frac{K}{\mu}, \tag{5}$$

式中, $w_1(x)=e^{\lambda x}-\mu^{-1}\sigma^2\lambda^2/2$ 为对应的齐次方程的一个解, $\lambda=[1+(1+2\mu\sigma^2)^{1/2}]/\sigma^2>0$; c_1 和 c_2 为待定常数. 下面将利用边界条件确定 c_1, c_2 和临界值 $\hat{x}$:

$$w(0)=P;\quad w(\hat{x})=Z(\hat{x})\ (\text{匹配条件});$$
$$w'(\hat{x})=Z'(\hat{x})\ (\text{光滑通过条件}). \tag{6}$$

以下分三种情况讨论.

a 假设 $Z(x)=P\gamma^x$, $\gamma\in(0,1)$ 为项目的开发率, 当 $x\to 0$ 时, $Z''(x)>0$, 由式 (5) 和 (6) 可得:

$$c_1=-\lambda^{-1}(\mu P+K)-c_2F(0);$$
$$c_2=\frac{P\gamma^{\hat{x}}\ln\gamma+(\mu P+K)e^{\lambda\hat{x}}w'_1(\hat{x})}{w'_1(\hat{x})f(\hat{x})+w_1(\hat{x})f'(\hat{x})},$$

式中, $F(x)\equiv\int(e^{\lambda x}-1)^{2/(\sigma^2\lambda)}w_1^{-2}(x)\mathrm{d}x$, $f(x)\equiv F(x)-F(0)=\int_0^x(e^{\lambda s}-1)^{2/(\sigma^2\lambda)}\cdot w_1^{-2}(s)\mathrm{d}s$. 临界值 $\hat{x}$ 所满足的代数方程为: $-\lambda^{-1}(\mu P+K)w_1(\hat{x})+c_2w_1(\hat{x})f(\hat{x})=P\gamma^{\hat{x}}+K/\mu$. 项目的价值

$$w(x)=w_1(x)\left[-\lambda^{-1}(\mu P+K)+c_2\int_0^x(e^{\lambda s}-1)^{2/(\sigma^2\lambda)}w_1^{-2}(s)\mathrm{d}s\right]-K/\mu.$$

定理 2 (拒绝规则)　如果

$$-(K+\mu P)\leqslant P\ln\gamma, \tag{7}$$

那么立即拒绝或不接受此项目.

证明　因为 $-(K+\mu P)\leqslant P\ln\gamma$, 所以 $P\gamma^{\hat{x}}\ln\gamma+(\mu P+K)e^{\lambda\hat{x}}>0$, 从而 $w''(x)>0$, 用反证法, 假设 $\hat{x}\neq 0$, 即 $\hat{x}>0$.

$$w'(x)=-(\mu P+K)e^{\lambda x}+c_2[w'_1(x)f(x)+$$

$w_1(x)f'(x)]$, $w'(0) = -(\mu P + K)$.

当式(7)成立时, $w'(0) \leqslant P\ln\gamma$, 从而对任意小的 Δx, 必有 $w(0+\Delta x) \leqslant P\gamma^{0+\Delta x}$, 因此项目不应该继续, 与 $\hat{x} > 0$ 相矛盾, 另外, $w''(x) > 0$, $P\gamma^x$ 是严格凸函数, 且 $w(0) = P$, 故 $w(x)$ 永远不可能与 $P\gamma^x$ 在 $x \in (0, \infty)$ 上有切点, 因此必有 $\hat{x} = 0$.

定理 3(临界值控制规则)　存在一个剩余时间的临界值 $\hat{x} > 0$, 当 $x < \hat{x}$ 时, 最优控制策略是继续; 当 $x > \hat{x}$ 时, 最优控制策略是退出.

证明　根据定理 2, 如果式(7)成立, 那么定理 3 立即成立. 如果式(7)不成立, 即 $-(\mu P + K) > P\ln\gamma$, 有 $w'(0) = -(K + \mu P)$, 那么 $w'(0) > P\ln\gamma$, 对任意小的 Δx, $w(0+\Delta x) > P\gamma^{0+\Delta x}$, 使得项目应该至少在很小时间区间上继续(证明了存在性). $P\gamma^{\hat{x}}\ln\gamma + (\mu P + K)e^{\lambda\hat{x}}$ 的符号依赖于 $\hat{x}$ 的值, 当 $\hat{x}$ 很小时, $P\gamma^{\hat{x}}\ln\gamma + (K + \mu P)e^{\lambda\hat{x}}$ 为负号, 当 $\hat{x}$ 充分大时又变正号, 如果 $P\gamma^{\hat{x}}\ln\gamma + (K + \mu P)e^{\lambda\hat{x}}$ 为负号, 那么 $w'' < 0$ 为严格凹函数, 这是不可能与 $P\gamma^x$ 有切点的, 与假设相矛盾, 因此只有 $\hat{x}$ 充分大时, 使 $w''(x) > 0$, $w(x)$ 与 $P\gamma^x$ 在 $(0, \infty)$ 上仅有一个切点(唯一性). 故当 $-(K + \mu P) > P\ln\gamma$ 时, 存在唯一临界值 $\hat{x} \in (0, \infty)$.

特别地, 当 $\mu = 0$ 时, 定理 2 和定理 3 正是文献[3]的拒绝规则和临界值控制规则.

b. 假设随 $x \to 0$ 时, 可实现的残值变化速度为匀速, 即 $Z''(x) = 0$.

在这种情况下, 最优决策规则是平凡的, $Z'(x) = -\alpha$, 即 α 表示项目可实现的价值的变化速度为常数, 那么最优决策规则: 当 $K + \mu P < \alpha$ 时, 接收项目并开发直到项目完成; 当 $K + \mu P \geqslant \alpha$ 时, 不接收此项目.

c. 假设 $Z''(x) < 0$, 即随 $x \to 0$ 时, 可实现的残值的速度变化为减速.

在这种情况下, 可以类似第一种情形的讨论, 这里略去.

参　考　文　献

[1] Majd S, Pindyck R S. Time to build, option value, and investment decisions. Journal of Financial Economics, 1987, 18: 7~27

[2] Ott S H, Thompson H E. Uncertain outlays in time to build problems. Managerial and Decision Economics, 1996, 17: 1~16

[3] Chi Tailan, Liu John, Chen Hong. Optimal stopping rule for a project with uncertain completion time and partial salvageability. IEE Transactions on Engineering Management, 1997, 44(1): 54~66

[4] Kamien M, Schwartz N. Dynamic optimization. Amsterdam: Elsever North Holland, 1991.

[5] Revuz D, Yor M. Continuous martingales and brownian motion. New York: Springer, 1991.

Exit decision for R&D project with uncertainty

Xue Minggao　Li Chulin

Abstract: An optimal exit model has been developed for the control of an investment project that takes an uncertain length of time to develop and can still provide a partial payoff even if it is terminated without attaining its original performance objective. The rejection rule and threshold rule are derived when the discount rate is allowed to be positive. The results obtained show that the optimal investment decision is highly sensitive to the investment rate, the discount rate, the project's maximum possible value and the speed of buildup.

Key words: investment decision; stopping time; HJB equation; residual completion time

Xue Minggao　Doctoral Candidate; Dept. of Mathematics, Huazhong Univ. of Sci. & Tech., Wuhan 430074, China.